



Líkan um veður og ástand vega sem leiðir til þungatakmarkana að vori

Titill: Líkan um veður og ástand vega sem leiðir til þungatakmarkana að vori

Höfundar: Skúli Þórðarson, Dr.ing.
Anton H, Þórólfsson
Vegsýn ehf
Reykjavíkurvegur 60
220 Hafnarfjörður
Sími: 562 0600 / 846 7253
skuli@vegsyn.is

Verkkaupi: Vegagerðin, Þjónustudeild

Efnisyfirlit

1	Inngangur	5
1.1	Bakgrunnur	5
1.2	Markmið.....	5
1.3	Frostmælakerfi Vegagerðarinnar	5
2	Reiknilíkan.....	7
2.1	Hitastig vegyfirborðs	7
2.2	Frostdýpt	10
2.3	Niðurstöður	12
3	Umræða og næstu skref.....	16
4	Þakkir	16
	Heimildir.....	17

Ágrip

Þróað hefur verið reiknilíkan sem reiknar yfirborðshita vegar og stöðu íss í burðarlögum fram í tímann á grundvelli veðurspár. Líkanið hefur verið keyrt daglega og fínstillt fyrir mælistöð við Skálholt. Þessar keyrslur hafa gengið mjög vel og niðurstöður þeirra sýna að með fínstillingu á líkaninu fæst góð fylgni milli mældrar og reiknaðrar stöðu íss í burðarlögum, sem og veghita.

English summary

A road surface temperature and frost depth forecast model has been developed. The purpose of the model is to predict the frost depth development in the next few days to allow timely declaration and dismissal of load restrictions. The model relies on the weather forecast and real-time measurements from frost depth sensors and automatic weather station. The frost depth measurement system and forecast model are a part of the ICERA road weather information system for traffic management and road service due to weather, surface and sub-base conditions.

1 Inngangur

1.1 Bakgrunnur

Vegagerðin ver árlega umtalsverðu fé til viðhalds þjóðvega. Stór hluti þessa viðhalds er til kominn vegna slits af völdum umferðar þunga ökutækja (flutningabílar), en hlutfall þungaumferðar er víða um 8 til 12 % af heildarumferð og hefur farið vaxandi undanfarin ár. Slit og skemmdir á burðarlögum og slitlögum vegna þungaumferðar er mest á vorin þegar efstu lög veganna byrja að þiðna, en einnig er algeng að slíkt „vorástand“ komi upp nokkrum sinnum á hverjum vetri þegar umhleyppingar verða. Í þessu ástandi er burðarþol mun minna en þegar ástand vegarins er einsleitt þ.e. frosinn í gegn eða þiðinn. Vegagerðin bregst við þessu með því að beita þungatakörkunum, og er þá algengast að leyfilegur hámarks öxulþungi ökutækja sé lækkaður úr 11,5 t í 10t.

1.2 Markmið

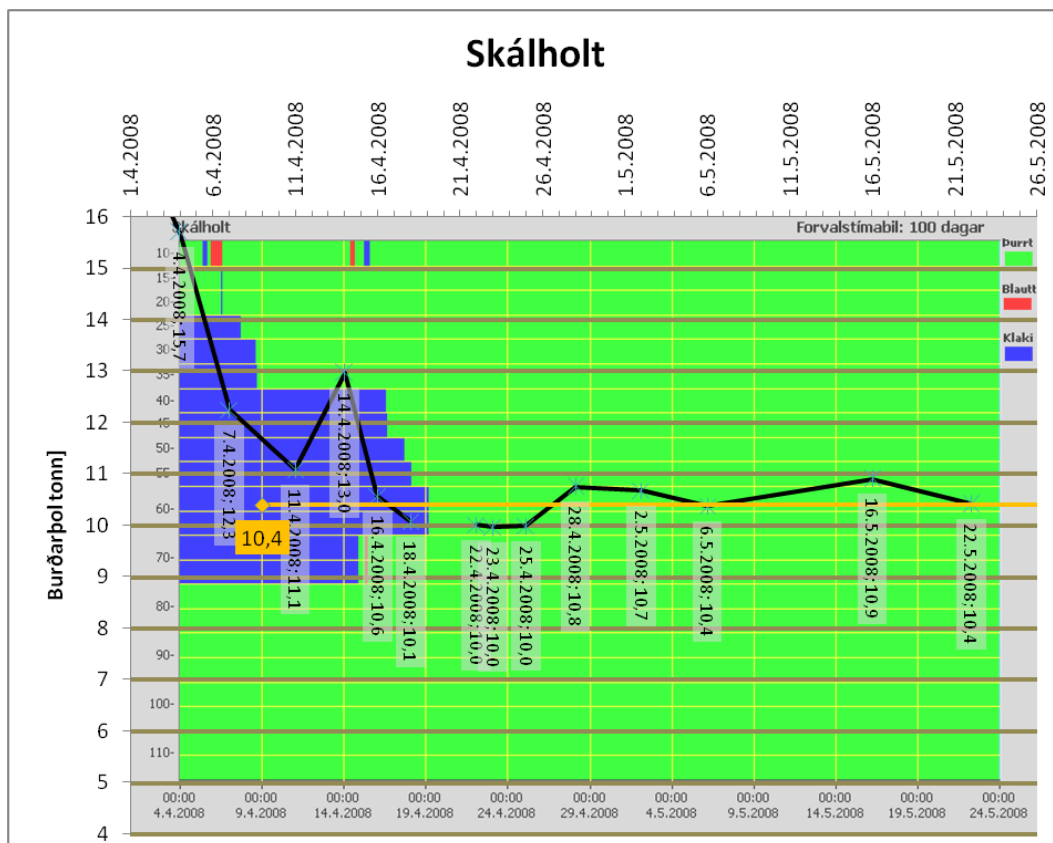
Verkefnið er unnið að frumkvæði Þjónustudeildar Vegagerðarinnar og er verkefnisstjóri Nicolai Jónasson hjá Þjónustudeild. Rannsóknasjóður Vegagerðarinnar fjármagnaði verkið. Ásamt skýrslu-höfundum unnu að verkinu þeir Einar Sveinbjörnsson hjá Veðurvaktinni og Guðjón Örn Birgisson hjá Almennu verkfræðistofunni.

Markmið þeirrar vinnu sem hér er lýst var að þróa spálíkan sem segir til um frosthéðingun í burðarlögum vega fram í tíma. Undir þetta fellur gerð reiknilíkana, annars vegar fyrir veghita og hins vegar fyrir varmaleiðni og fasaskipti vatns og íss í burðarlögum. Með líkaninu má nýta betur frostmælakerfi í vegum og veðurspá til þess að vöktun með ástandi vega sem leiðir til þungatakmarkana verði áreiðanlegri, og beita megi þungatakörkunum á markvissari hátt en áður til góða fyrir veghaldara og flutningsaðila. Þess er vænst að með líkaninu verði unnt sjá fyrir með 2-3 þriggja sólahringa fyrirvara hvenær nauðsynlegt er að grípa til áspungatakmarkana á einstökum leiðum. Með því móti má stýra þungatakörkunum með markvissari hætti en áður, draga úr slitlagsskemmdum og niðurbroti burðarlaga af völdum þungaálags og takmarka þann tíma sem þungatakmarkanir eru í gildi.

1.3 Frostmælakerfi Vegagerðarinnar

Frostmælakerfi Vegagerðarinnar hefur verið notað með góðum árangri undanfarið til stuðnings við vöktun á ástandi vega. Árið 2007 var kerfið kvarðað með tilliti til falllööðsmælinga (FWD) á burðarþoli vega á þiðutíma og hefur það leitt til betri túlkunar á rauntímamælingum í kerfinu [1]. Þá voru einnig gerðar tilraunir með varmaleiðnilíkan til þess að reikna varmastreymi í burðarlögum vega [1], þar sem hitastig var reiknað þrjá daga fram í tímann frá vegyfirborði og niður á 120 cm dýpi í veginum. Upphafsgildi í líkanið fást frá frostmælistaf og efri jaðargildi frá veghitamælingu.

Niðurstöður úr þessum áfanga bentu til þess að falllööðmælingar þarf að gera með mjög stuttu millibili á þeim tíma þegar klaki er að bráðna í vegum til þess að fá fullnægjandi upplýsingar um samband frostástands og burðarþols. Vorið 2008 lét Þjónustudeild burðarþolsmæla 8 vegi á Suðurlandi nokkrum sinnum í viku á þíðutímanum. Niðurstöður þessara mælinga hafa gefið mjög góða mynd af því hvernig sambandi burðarþols og frostástands er háttað [3], sjá mynd hér að neðan.



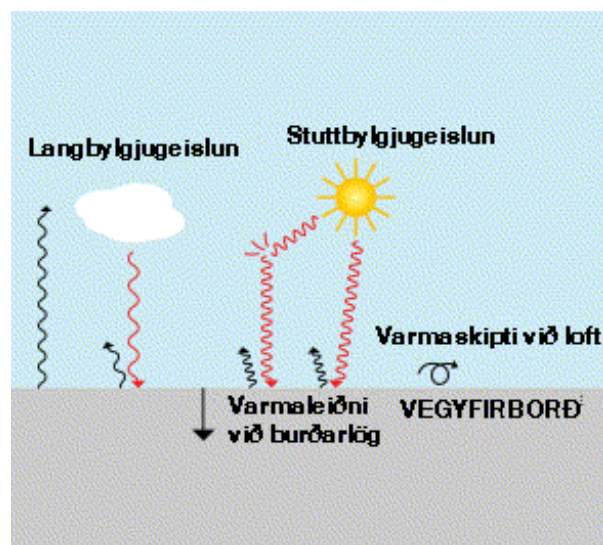
Mynd 1. Burðarþolsmælingar á þíðutíma við frostmælistaf við Skálholt.

Óhætt er að segja að frostmælakerfi Vegagerðarinnar sé einstakt á heimsvísu, en á þeim tíma sem það hefur verið starfrækt hafa safnast inn gögn sem eru mjög verðmæt vegna rannsókna og líkangerðar, auk þess sem veghaldarinn hefur einstaklega góða yfirsýn yfir ástand í rauntíma. Með HRAS veðurspákerfinu er nú unnt að fá mjög áreiðanlegar staðbundnar veðurspár sem eru nauðsynlegar fyrir rekstur reiknilíkans fyrir frostþíðuástand í vegum. Vegagerðin hefur um árabil fengið veghita- og hálkuspár fyrir ákveðnar mælistöðvar á þjóðvegum sem unnar eru af dönsku veðurstofunni, með aðkomu Veðurstofu Íslands. Ráðgert hafði verið að hafa þessar spár til hliðsjónar vegna spágerðar fyrir yfirborðshita á vegum í þessu verkefni, en slík spá er forsenda spágerðar fyrir varmaflutning og frostverkun í burðarlögum. Það varð hins vegar úr að ráðist var í að útbúa yfirborðshitalíkan í núverandi áfanga verkefnisins, þar sem aðgengi að nauðsynlegum aðföngum til þess er til staðar á Íslandi.

Varmflutningur og frostverkun í burðarlögum vega hefur áður verið reiknaður og hér er stuðst við afrakstur annarra rannsækenda svo sem, t.d. Áke Hermanson, 2002 ” Modeling of frost heave and surface temperatures in roads” og Guðjón Örn Björnsson, 2006, „Thaw induced axle load limitations“, MSc. ritgerð styrkt af Vegagerðinni).

2 Reiknilíkan

Til þess að spá fyrir um frosthegðun í burðarlögum vega þarf að útbúa líkan sem tekur mið af mældum gögnum og spágildum. Líkanið þarf að ná frá andrúmslofti og niður að vegyfirborði og áfram niður í burðarlög vegarins. Reikna má ísmyndun og bráðnun í burðarlögum vegarins út frá hitastigi vegyfirborðs, sem aftur er háð veðri, geislun, og hitastigi í burðarlögum vegar. Þegar sól tekur að hækka á lofti á vorin er geislun sólar allsráðandi um hitastigsþróun vegyfirborðs en skýjahula er takamarkandi þáttur fyrir styrk þessarar geislunar. Til þess að stilla af líkan þarf að taka tillit til sögulegra mælinga á veðri, veghita og klakabúskap en til þess að reikna spá í rauntíma þarf aðgengi að rauntímamælingum og veðurspá.



Mynd 2. Yfirborðshiti vegar er háður stuttbylgjugeislun sólar, langbylgjugeislun til og frá vegyfirborði, lofthita og vindhraða og varmaleiðni til burðarlaga. (Mynd fengin að láni frá [4]).

2.1 Hitastig vegyfirborðs

Við útreikninga á áhrifum langbylgjugeislunar og lofthita er stuðst við aðferðir sem fjallað er um í heimild nr. [5].

Langbylgjugeislun frá yfirborði

Gert er ráð fyrir því að langbylgjugeislun frá jörð fylgi Stefan-Boltzman lögmáli;

$$q_r = \varepsilon \sigma T_0^4$$

Jafna 1

þar sem q_r er útgeislun vegyfirborðs í W/m^2 , ε er útgeislunarstuðull, jafn (1-albedo) en albedo-stuðull lýsir endurspeglunareiginleikum yfirborðs, σ er Stefan-Boltzman fasti $5,68 \cdot 10^{-8} W/(m^2 \text{ } ^\circ K^4)$ og T_0 er hitastig vegyfirborðs í Kelvingráðum.

Langbylgjugeislun til yfirborðs

Andrúmsloftið gleypir geislun og varpar henni til yfirborðs jarðar sem geislun á langbylgjusviði. Hluti þessarar geislunar er tekinn upp af vegyfirborði og má rita sem

$$q_a = \varepsilon_a \sigma T_2^4$$

Jafna 2

þar sem q_a er langbylgjugeislun sem vegyfirborð tekur upp (W/m^2). Stuðullinn ε_a lýsir gleypni yfirborðs gagnvart langbylgjugeislun og er einnig háður skýjamagni en T_2 er lofthiti í 2 m hæð.

Stuttbylgjugeislun sólar

Sólin sendir geislun á stuttbylgjusviði til jarðar, sem að hluta til er tekin upp af eða endurvarpað af andrúmsloftinu. Hluti hennar sleppur til vegyfirborðs og það sem ekki endurvarpast af yfirborðinu er tekið upp til hitunar vegyfirborðs. Út frá hnattstöðu og tíma má reikna hámarksstyrk stuttbylgjugeislunar sem nær til yfirborðsins, en þessa geislun þarf svo að leiðrétta með hliðsjón af albedo-stuðli yfirborðsins og skýjahulu. Hér er stuðst við tilbúið tölvulíkan [8] sem byggir á útbreiddu líkani Bird og Hulstrom¹, til þess að reikna geislun fyrir athugunarstað. Stuttbylgjugeislun frá sólu, q_{GL} (W/m^2), sem tekin er upp af vegyfirborði er skv. þessu

$$q_{GL} = q_{Bird} \cdot (1 - alb) \cdot \left(1 - \frac{NH}{8}\right)$$

Jafna 3

þar sem q_{Bird} er reiknuð geislun á grundvelli staðlaðra aðstæðna í andrúmslofti², alb er endurkaststuðullinn (albedo) og NH er skýjahula lágskýja í áttunduhlutum.

¹ Richard E. Bird and Roland L. Hulstrom A Simplified Clear Sky Model for Direct and Diffuse Insolation on Horizontal Surfaces. SERI/TR-642-761, Solar Energy Research Institute, Golden, Colorado, USA, February 1981.

² Hér stuðst við:

barometric pressure (mb, sea level = 1013)	1013
ozone thickness of atmosphere (cm, typical 0.05 to 0.4 cm)	0,35
water vapor thickness of atmosphere (cm, typical 0.01 to 6.5 cm)	4,00

Varmaskipti yfirborðs við andrúmsloftið

Varmaskipti (konveksjon), q_c (W/m^2), frá yfirborði til andrúmsloftsins má reikna skv.

$$q_c = h_c(T_0 - T_2)$$

Jafna 4

Hér eru T_0 og T_2 veghiti og lofthiti eins og áður og h_c er háð hitastigi og vindhraða þannig;

$$h_c = 698,24a \left(bT_m^c U^d + 0,00097 |T_0 - T_2|^e \right)$$

Jafna 5

þar sem U er vindhraði í m/s, T_m er meðaltal hitastigs vegar og lofts í Kelvingráðum. Fjallað er um fastana a , b , c , d og e í næsta kafla.

Varmaskipti yfirborðs við burðarlög

Vegyfirborð skiptist á varma við burðarlög með varmaleiðni;

$$q_N = -kA \frac{(T_0 - T_{d10})}{\Delta z}$$

Jafna 6

þar sem q_N er varmastreymi milli yfirborðs og burðarlags (W/m^2), k er varmaleiðnistuðull, A er flatarmálseining á yfirborði og Δz er dýpt á efsta reiknipunkt í burðalagi (hér 10 cm þar sem hitastigið T_{d10} vísar til 10 cm dýptar).

Varmaskipti í burðarlögum

Varmastreymi frá vegyfirborði og niður á tiltekið dýpi er reiknað með varmaleiðnijöfnunni;

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Jafna 7

þar sem varmaleiðnistuðullinn, α , er skilgreindur sem

$$\alpha = \frac{k}{\rho C}$$

aerosol optical depth at 500 nm (typical 0.02 to 0.5)	0,35
aerosol optical depth at 380 nm (typical 0.1 to 0.5)	0,35
forward scattering of incoming radiation (typical 0.85)	0,85

Jafna 8

þar sem k er varmaleiðnistuðullinn, ρ er eðlismassi burðarlags (kg/m³) og C er varmarýmd burðarlaga í KJ/(kg °C). Til þess að leysa varmaleiðnijöfnuna tölulega þarf að gefa bæði upphafs- og jaðarskilyrði. Upphafsgildi hitastigs og eru fengin frá frostdýptarnema. Jaðarhitastig við yfirborð fæst frá reiknuðm veghita næstu klukkustund á undan og fyrir botnhita er síðustu mælingu frá frostdýptarstaf haldið stöðugri út spátímabilið, enda breytist hann mjög hægt. Töluleg lausn varmaleiðnijöfnunnar er;

$$\frac{\frac{T(l+1, n) - T(l, n)}{Z_{l+1} - Z_l} - \frac{T(l, n) - T(l-1, n)}{Z_l - Z_{l-1}}}{\frac{Z_{l+1} - Z_l}{2} + \frac{Z_l - Z_{l-1}}{2}} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T(l, n+1) - T(l, n)}{t_{n+1} - t_n} \right)$$

Jafna 9

þar sem l er vísir í dýptarhnit og n er vísir í tímaskref. Óþekkta stærðin sem leist er fyrir í hverju tímaskrefi á hverju dýpi er $T(l, n+1)$. Einnig má leysa jöfnuhneppi allra dýpta og tímaskrefa í einu lagi með aðferð Crank-Nicolson líkt og gert er í heimild [1].

Summa varmastreymis um yfirborð

Þegar allar orkutilfærslur í tímaskrefi hafa verið reiknaðar er reiknuð út sú hitastigsbreyting sem verður á vegyfirborði, ΔT :

$$\Delta e = S \cdot C \cdot m \cdot \Delta T$$

Jafna 10

Hér er Δe heildarorkufærsla til eða frá vegyfirborði, þ.e. summa q_r , q_w , q_{GL} , q_c og q_N . C er varmarýmd slitlags, KJ/(kg °C), m er massi slitlagseiningar sem hitnar eða kólnar um ΔT gráður í hverju tímaskrefi. S er fasti sem tekur tillit til fasabreytinga vegna raka í vegyfirborði og slitlagi þegar veghitinn, T_0 , er í kringum núll gráður og dregur þannig úr hitastigsbreytingu vegna þeirrar orku sem fer í fasaskipti.

2.2 Frostdýpt

Út frá hitastigsþróun vegyfirborðsins er lóðrétt færsla á fasamörkum í burðarlagi reiknuð, þ.e. hvort frostlínán færist neðar (neðri fasamörk) eða bráðnun verður (efri fasamörk). Notuð er s.k. *Stefan* jafna sem gerir ráð fyrir því að eina orkan sem þarf að fjarlægja úr jarðvegssýni til þess að frysta það er bræðsluvarmi rakans í sýninu. *Stefan* jafnan er;

$$L \frac{dX}{dt} = k \frac{v_s}{X}$$

Jafna 11

þar sem X er reiknuð dýpt fasamarka, L er bræðsluvarmi jarðvegsins, k_f er varmaleiðni (eftir atvikum í frosnu eða þiðnu ástandi) og v_s er mismunur yfirborðshita og frostmarks raka í jarðveginum. Lausn jöfnunnar er

$$X = \sqrt{\frac{2k}{L}} \int v_s dt$$

Jafna 12

Framlag yfirborðshita til fasabreytinga í hverju tímaskrefi (breyting á X) tekur formerki plús eða mínus (bráðnun eða frysting) eftir því hvort hitastigið er ofan eða neðan frostmarks.

Tafla 1. Yfirlit yfir hlutverk og gildi ýmissa fasta í líkaninu.

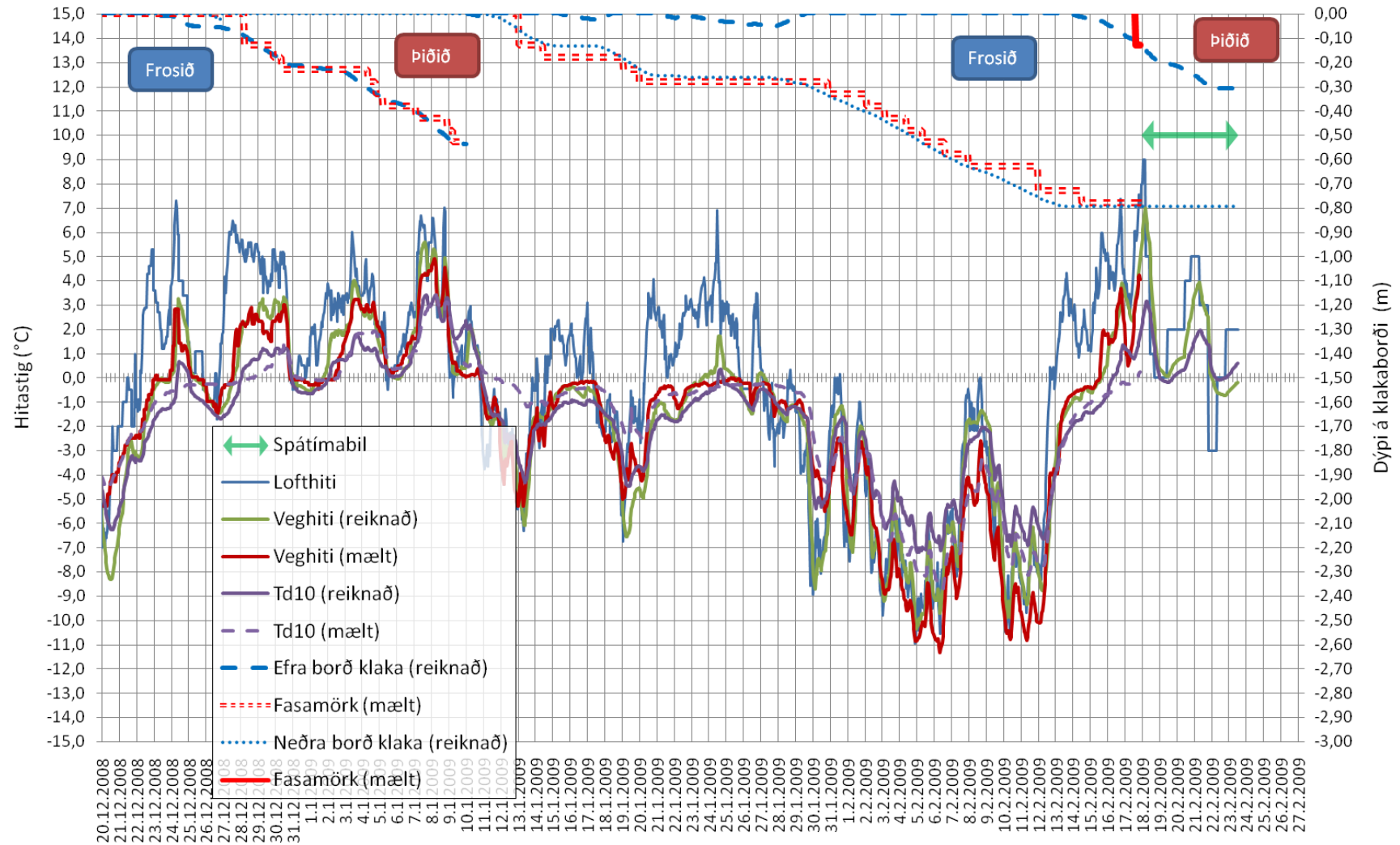
Fasti	Notkunarstaður	Skýring
ε	Jafna 1	Útgeislunarstuðull fyrir langbylgjugeislun, jafn (1- α_b) sem einnig lýsir endurvarpshlutfalli innkominnar geislunar.
α_b	Jafna 3, Jafna 1	Albedo lýsir endurvarpseiginleikum yfirborðsins og tekur gildi á bilinu 0 til 1. Dökkt yfirborð s.s. nýtt malbik hefur gildi 0,05 til 0,15, nýfallinn snjór 0,80 -0,90
ε_a	Jafna 2	Gleypni yfirborðs gagnvart langbylgjugeislun, einnig háð skýjamagni. Heimild [5] gefur upp gildið 0,7 fyrir heiðskýru. (Við kvörðun líkans hér hefur þessum fasta verið haldið í 0,75 en breytilegt albedo notað).
NH	Jafna 3	Skýjahula lágskýja í áttunduhlutum. Tekur gildið 0 á heiðskýrum degi og 8 þegar alger skýjahula ríkir.
a	Jafna 5	Fasti fyrir áhrif varmaskipta við loft. Háð vætu og snjó á vegi. Heimild [5] gefur upp gildið 3 fyrir vetraraðstæður og 1,1 fyrir sumar.
b	Jafna 5	Hér notað gildið 0,00144 skv. [5].
c	Jafna 5	Hér notað gildið 0,3 skv. [5].
d	Jafna 5	Fasti sem ákvarðar áhrif vindhraða á varmaskiptin. Í heimild [5] reyndist vindhraði ekki skipta máli að vetrarlagi og gildið því núll, en 0,5 notað að sumarlagi. Hér hefur gildið 0,5 gefið góða raun fyrir vetraraðstæður.
e	Jafna 5	Hér notað gildið 0,3 skv. [5].

Fasti	Notkunar- staður	Skýring
k	Jafna 6	Varmaleiðni burðarlags frá yfirborði og niður á 10 cm dýpi. Gildi stuðulsins er hér ákvarðað.
$\alpha = \frac{k}{\rho C}$	Jafna 7, Jafna 8	Varmaleiðnistuðull í burðarlögum frá vegyfirborði og niður úr. Gildi α er ákvarðað lagskipt með samanburði hitamælinga í frostmælistaf og útreikninga.
k / L	Jafna 11, Jafna 12	Hlutfall varmaleiðni og bræðsluvarma í burðarlögum. Kvarðað sem einn fasti með samanburði mældrar og reiknaðrar frostdýptar.
S	Jafna 10	Tekur gildið 6 þegar T_0 er innan skilgreindra marka í kringum frostmark. Lækkar framlag varmastreymis til vegyfirborðs til hitabreytingar.
$C \cdot m$	Jafna 10	Margfeldi varmarýmdar og massa óþekktrar þykktar slitlags og efra burðarlags. Kvarðað sem ein stærð með samanburði mælds og reiknaðs veghita.

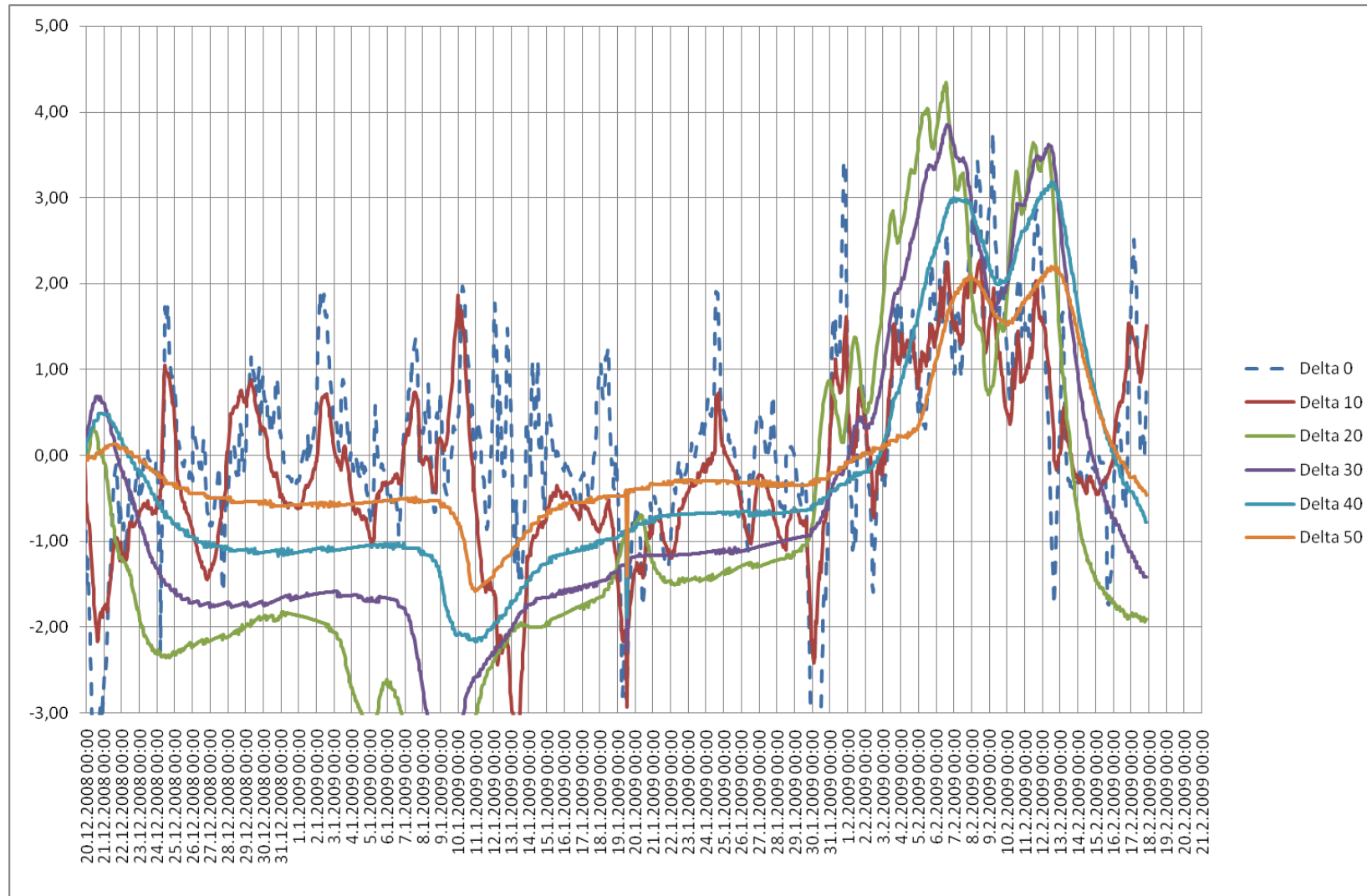
2.3 Niðurstöður

Líkanið hefur verið kvarðað við mælistað á Skálholti. Líkanið var sett upp í excel-töflureikni og hefur verið í stöðugri keyrslu og endurkvörðun frá 19. desember og þar til þetta er skrifað í lok febrúar 2009. Á Mynd 3 má sjá niðurstöður líkansins, en skýringar eru innifeldar á grafið.

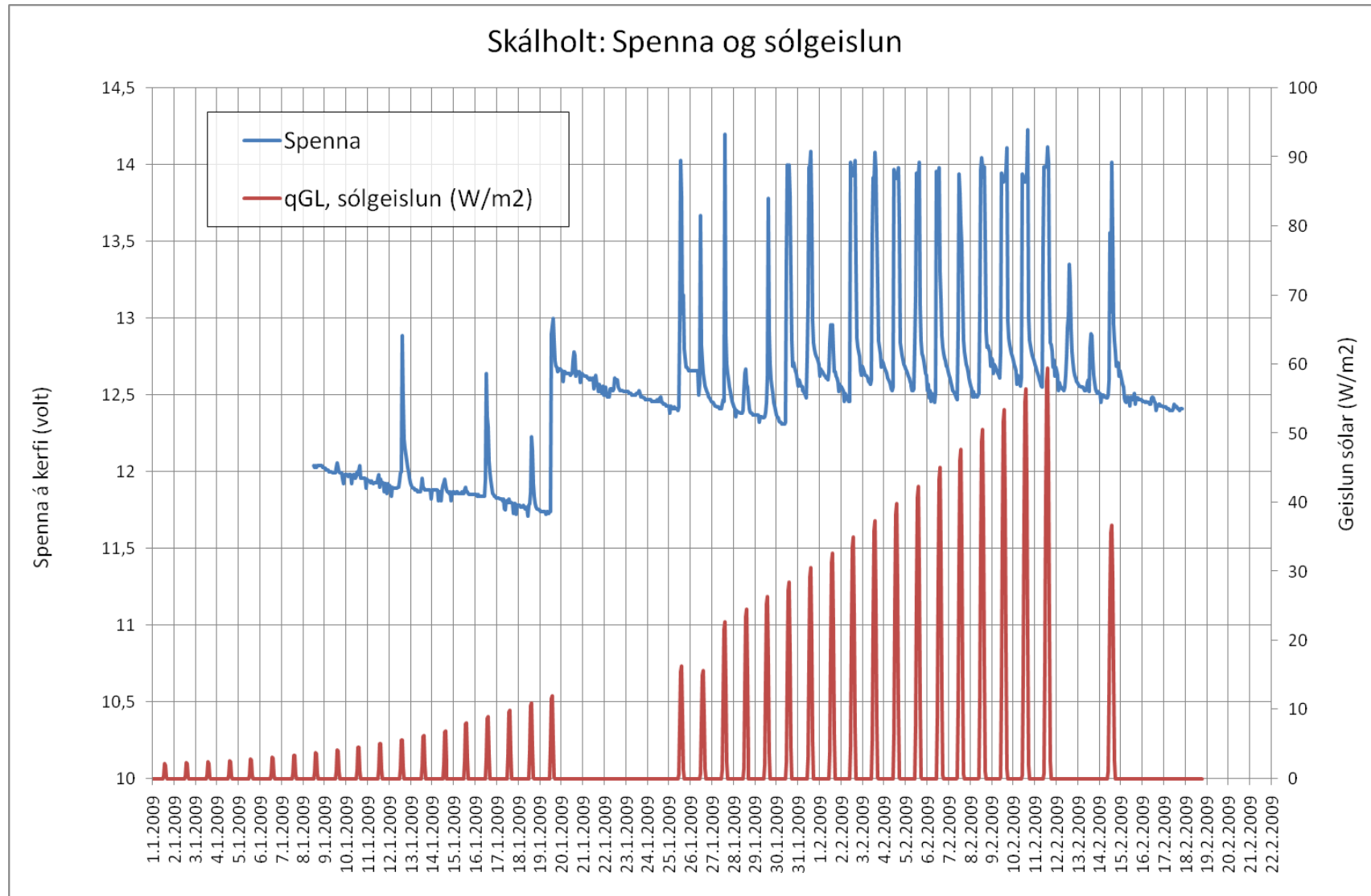
Skálholt: Frostdýptarspá fyrir burðarlög vegar



Mynd 3. Niðurstöður frostdýptarlíkans fyrir Skálholt í desember til febrúar.



Mynd 4. Mismunur mælds og reiknaðs hitastigs vegyfirborðs og mismunandi dýpta í burðarlögum.



Mynd 5. Reiknuð stuttbylgjugeislun sólar, leiðrétt fyrir skýjahulu, ásamt mældri spennu á búnaði. Spennuferill breytist eftir þeirri orku sem kemur frá sólarcellu.

3 Umræða og næstu skref

Tímafrekt er að nota líkanið á töflureiknisformi þar sem handvinna þarf allan innlestur. Brýnt er að koma líkaninu inn í umhverfi sem leyfir sjálfvirkann innlestur veðurspár og mælinga, og jafnframt er aðgengilegt til þess að kvarða stuðla og gera breytingar á forritunarkóða. Einnig þarf að vera unnt að lesa inn eldri tímaraðir til þess að geta kvarðað líkanið fyrir einstaka staði áður en rauntímakeyslur hefjast. Til þess að ná sem bestum árangri við kvörðun þarf að vera unnt að teikna línurit ýmissa veðurbreyta og stuðulgilda, svo að einangra megi þær stærðir sem máli skipta.

Tafla 2. Tímaraðir sem lesa þarf inn í líkan til keyrslu, eftirlits og kvörðunar.

Tímaröð	Tegund	Uppruni	Vægi
Lofthiti	Spá	HRAS / HIRLAM	Nauðsyn
Úrkoma	Spá	HRAS / HIRLAM	Stoðgögn
Skýjahula lágskýja	Spá	HRAS / HIRLAM	Nauðsyn
Vindhraði	Spá	HRAS / HIRLAM	Nauðsyn
Vindhraði	Mæling	Veðurstöð Vg	Stoðgögn
Lofthiti	Mæling	Veðurstöð Vg	Nauðsyn
Veghiti	Mæling	Veðurstöð Vg	Nauðsyn
Snjóþekja	Mæling ¹⁾	Veðurstofan	Stoðgögn
Geislun v/ Bústaðaveg	Mæling	Veðurstofan	Stoðgögn
Hiti burðarlaga	Mæling	Frostmælir Vg	Stoðgögn
Frostdýpt	Mæling ²⁾	Frostmælir Vg	Nauðsyn
Úrkoma	Mæling	Veðurstofan	Stoðgögn
Spenna (volt) á sólarsellu	Mæling ³⁾	Frostmælir/veðurst. Vg	Stoðgögn

1) Sjónmat á mönnum stöðvum Veðurstofunnar

2) Lesa þarf af fasariti og staðfesta með aflestri hita og leiðni. Ekki sjálfvirk skráning fyrir hendi.

3) Sólarsella er ekki til staðar á öllum stöðvum

4 Þakkir

Verkefnið er unnið fyrir Þjónustudeild Vegagerðarinnar og er að megininu til fjármagnað af Rannsóknarsjóði Vegagerðarinnar. Nýsköpunarsjóður námsmanna veitt verkefninu einnig fjárstuðning. Þessum aðilum eru færðar bestu þakkir. Nicolai Jónasson hjá Þjónustudeild Vegagerðarinnar fær bestu þakkir fyrir hvatningu og óbilandi trú á þessu verkefni. Veghönnunardeild Vegagerðarinnar hefur séð um falllódsmælingar og fær bestu þakkir fyrir. Einar Sveinbjörnsson hjá

Veðurvaktinni ehf. og Guðjón Örn Björnsson hjá Almennu verkfræðistofunni hafa verið okkur til aðstoðar í þessu verkefni og kunnum við þeim bestu þakkir fyrir.

Heimildir

- [1] Anton Heiðar Þórólfsson, 2008: *Spálíkan fyrir frostdýpt í burðarlögum vega*. Skýrsla til Nýsköpunarsjóðs námsmanna.
- [2] Skúli Þórðarson og Anton H. Þórólfsson, 2007: *Kvörðun frostdýptarmæla út frá falllóðsmælingum. Áfangi ársins 2007*. Unnið fyrir Þjónustudeild Vegagerðarinnar með styrk frá Rannsóknarsjóði Vegagerðarinnar.
- [3] Skúli Þórðarson, 2008: *Burðarþolsmælingar við frostmælistöðvar á vegum 2008*. Unnið af Vegsýn fyrir Þjónustudeild Vegagerðarinnar.
- [4] Åke Hermanson, 2002: *Modeling of frost heave and surface temperatures in roads*. PhD thesis, Luleå University of Technology, apríl 2002.
- [5] Åke Hermanson, 2004: *Mathematical model for paved surface summer and winter temperature: comparison of calculated and measured temperatures*.
- [6] Orlando B. Andersland og Branko Ladanyi. *Frozen Ground Engineering*. John Wiley and Sons, Inc., 2004.
- [7] Guðjón Örn Björnsson, 2006; *Thaw induced axle load limitation*. MSc. thesis, Civil and environmental engineering, University of Alberta, Edmonton.
- [8] Greg Pelletier: *A solar position and radiation calculator for Microsoft Excel/VBA*. Washington state Department of Ecology.